数理解析研究所講究録
813巻 1992年 1-9

Twisting Operations of Knots

早稲田大理工 大山淑之 (Yoshiyuki Ohyama)

このノートでは link diagram 上の twisting move, (n,k)-move を定義し，どのような n と k に対し (n,k)-move が unknotting operation になるか考察していく．更に，unknotting operation となる場合 μ-component link に対し (n,k)-move により生成される同値関係による同値類の個数を調べていく．

1. Fox の congruence class と (n,k)-move の定義

Fox の congruence class ([3]) に対し中西・鈴木 ([7]) は次の様な結果を示した．

定義1.1 ([3]) n, q を正整数とする．以下の条件を満たす knot $K_0, K_1, \cdots, K_\ell$, 整数 $c_1, c_2, \cdots, c_\ell$, trivial knot $m_1, m_2, \cdots, m_\ell$ が存在するとき knot type K と λ が

congruent modulo (n, q) という．($K \equiv \lambda \mod (n,q)$ とかく.)

(1) k_{i-1} と m_i は disjoint.

(2) k_i は k_{i-1} から m_i に沿った $1/c_i n$-surgery で得られる.

(3) linking number $lk(k_{i-1}, m_i) \equiv 0 \mod q$.

(4) k_0 は K と, k_ℓ は λ と 同じ knot type である.

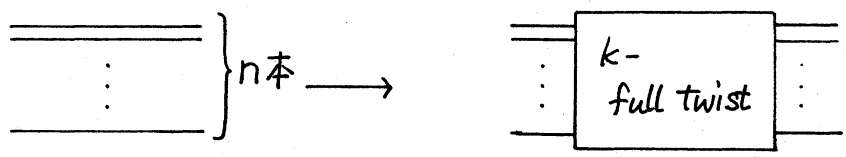
定理1.2 ([7]) n を2以上の整数, q を正整数で $(n, q) \neq (2,1), (2,2)$ とする. このとき congruence modulo (n,q) に対し 無限個の異なる class が存在する.

更に 中西 ([8], [10]) により $(n,q) = (2,1), (2,2)$ については 次の結果が得られている.

定理1.3 ([8], [10]) すべての knot は congruent modulo $(2,1)$ であり 更に congruent modulo $(2,2)$ である.

Fox の congruence class では twist する際の string の本数は一定ではない (但し linking number は一定.).
そこで string の本数を限定した 次のような (n,k)-move を定義する.

定義1.4　2 以上の整数 n と正整数 k に対し　下図の様な link diagram 上の local move を (n,k)-move とよぶ.



2. Unknotting operation と (n,k)-move

ここで 従来の unknotting operation と (n,k)-move の関係を locally equivalent という概念を用いて述べる.

定義2.1 ([1],[2])　link diagram 上の local move A, B が locally equivalent ($A \overset{l}{\sim} B$) であるとは 互いに 一方の move が 他方の move の有限回の操作で得られることをいう.

$\mathcal{L}^{\mu}$ を μ-component link 全体とする. 2つの μ-component link が (n,k)-move で移り合うとき同値であるとし 同値類の個数を $\left|\mathcal{L}^{\mu}/(n,k)\right|$ であらわす.

L_1, L_2, L_3, L_4 を次の図の様に 一ヶ所だけ異なる diagram を持つ link とする.

L_1 L_2 L_3 L_4

中西（[9]）は L_i と L_j の diagram 間の local move として Δ_{ij}-move を定義し 次の結果を示している.

命題 2.2 ([9]) Δ_{ij}-move は local equivalence により 次の様に分類できる.

(1) Δ_{12}-move $\overset{\ell}{\simeq}$ Δ_{34}-move $\overset{\ell}{\simeq}$ Δ_{13}-move $\overset{\ell}{\simeq}$ Δ_{24}-move.

(2) Δ_{14}-move $\overset{\ell}{\simeq}$ Δ_{23}-move.

命題 2.3 ([9]) Δ_{12}-move により生成される同値関係に対し μ-component link の同値類の数は $2^{\mu-1}$ である.

Δ_{14}-move は [6] の Δ-unknotting operation にあたり Δ-unknotting operation は linking number をかえない.

Δ_{ij}-move と (n,k)-move の関係は次の様に表わされる.

命題 2.4 (1) Δ_{14}-move は $(2,2)$-move と $(3,2)$-move により生成される. (2) Δ_{12}-move $\overset{\ell}{\simeq}$ $(3,1)$-move.

命題2.4 により ただちに次の結果が得られる.

系 2.5 $\left|\mathcal{L}^{\mu}/(3,1)\right| = 2^{\mu-1}$

村上([5]) による #-unknotting operation に対しても同方向に orientation を入れたときの (3,1)-move と locally equivalent であることがわかる.

3. (n,2)-, (n,1)- move について

定理1.2 より $k \geq 3$ の場合 命題3.1 が得られる.

命題3.1 $\mathcal{K}$ を knot 全体の集合とする. $k \geq 3$ のとき

$$\left|\mathcal{K}/(n,k)\right| = \infty$$

つまり 異なる同値類が無限個存在する.

よって unknotting operation になりうるのは k が 1 あるいは 2 のときとなり まず (n,1)-move について考えていく.

定理3.2 $(n,1)$-move は n が偶数のとき $(2,1)$-move と n が奇数のとき $(3,1)$-move と locally equivalent である.

系 3.3 任意の $n(\geq 2)$ に対し $(n,1)$-move は unknotting operation である.

定理3.2 と系2.5 により $\mathcal{L}^{\mu}$ に対して次の系が得られる.

系3.4
$$\left|\mathcal{L}^{\mu}/(n,1)\right| = 1 \qquad n: \text{even}$$
$$\left|\mathcal{L}^{\mu}/(n,1)\right| = 2^{\mu-1} \qquad n: \text{odd}$$

k が 2 の場合であるが 中西([10]) による定理1.3 の証明により 次のことが導かれる.

命題3.5 n が 6 以上の偶数であれば $(n,2)$-move は unknotting operation である.

では n が奇数のときはどうであろうか. signature([13]) と Arf invariant を用いることにより 次の定理が得られる.

定理 3.6　$\mathbb{K}$を knot 全体の集合とし　nを3以上の奇数とする．このとき　$\left|\mathbb{K}/_{(n,2)}\right| \geq 8$．
特に　$\left|\mathbb{K}/_{(3,2)}\right| = \infty$．

4. Mathieu の問題

Mathieu は [4] において (n,k)-move の言葉では次の様に表現できる問題を提示している．

問題　任意の knot は適当な n, k をとると 1回の (n,k)-move で trivial knot にできるか．できないならば，最低何回の (n,k)-move が必要か．

問題の前半部分に対しては　安原（[12]），宮崎により独立に反例が作られている．後半部分の答えとして　以下の定理が示せる．

定理 4.1　任意の knot K に対し　以下の系列を与える自然数 n が存在する．

$$K \xrightarrow{(n,1)} K' \xrightarrow{(n-1,1)} O$$

ここで K' はある knot，O は trivial knot　をあらわし

$K \xrightarrow{(n,1)} K'$ は K' が K から 1回の $(n,1)$-move で得られることを示している.

詳しい証明等については [11] を参照して下さい.

参考文献

[1] H. Aida. Unknotting operations of polygonal type. Tokyo J. Math., vol 15, No 1, (1992) 111-121.

[2] H. Aida. The oriented Δij-move on Links. preprint.

[3] R. H. Fox. Congruence classes of knots. Osaka Math. J., 10 (1958) 37-41.

[4] Y. Mathieu. Thèse. L'Universitè de Provence.

[5] H. Murakami. Some metrics on classical knots. Math. Ann., 270 (1990) 207-215.

[6] H. Murakami and Y. Nakanishi. On a certain move generating link-homology. Math. Ann., 284 (1989) 75-89.

[7] Y. Nakanishi and S. Suzuki. On Fox's congruence classes of knots. Osaka J. Math., 24 (1987) 217-225.

[8] Y. Nakanishi. On Fox's congruence classes of knots II. Osaka J. Math., 27(1990) 207-215.

[9] Y. Nakanishi. Replacements of the Conway third identity. Tokyo J. Math., vol 14, No. 1 (1991) 193-203.

[10] Y. Nakanishi. From a view of localized link theory. Knot 90, Walter de Gruyter, Berlin and New York.

[11] Y. Ohyama. Twisting and unknotting operations, preprint.

[12] A. Yasuhara. On slice knots in the complex projective plane. to appear in the Revista Matemàtica.

[13] Y. Wu. Signature of torus links. Kobe J. Math., 5(1988) 297-304.